Entwicklung von Stadt, Land, Wirtschaft und Sozialem

-

Das Problem der optimalen Dose

1. Problemstellung

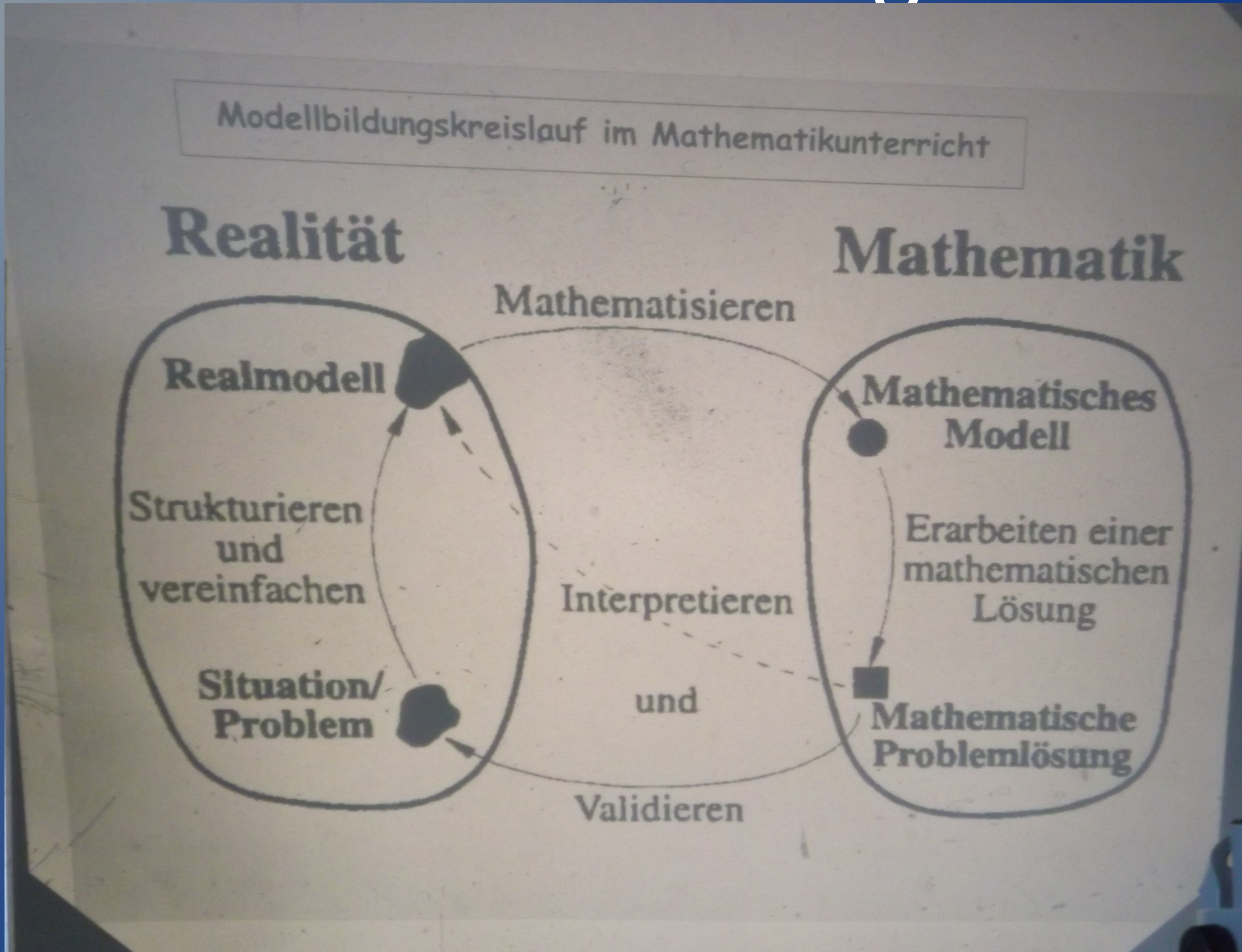
Was muss ein Fabrikant bei der Herstellung von Dosen beachten?

- Praktische Erwägungen:
  - Handlichkeit
- Technische Erwägungen:
  - Stabilität

Was muss ein Fabrikant bei der Herstellung von Dosen beachten?

- Ökonomische Erwägungen:
  - Geringe Kosten
  - Geringer Materialverbrauch
- Vorschriften
  - Normierungen

2. Modellbildung



2.1 – 1. Realmodell

Simulation einer 850mL Dose

Ausgehend von einem Zylinder

Extremalproblem: möglichst geringe Oberfläche bei gegebenen Volumen

Extremalbedingung: $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Nebenbedingung: $h = \frac{850}{\pi r^2}$

Zielfunktion: $O(r) = 2\pi r^2 + \frac{1700}{\pi r}$

Definitionsbereich: $0 < r < \infty$

Notwendige Bedingung: $O'(r) = 0$

$$4\pi r - \frac{1700}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{425^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow r \approx 5{,}13$$

Hinreichende Bedingung: $O'(r_o) = 0 \wedge O''(r_0) \neq 0$

$$O''\left(\frac{425^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}\right) = 12\pi > 0$$ → lokales Minimum

$$O\left(\frac{425^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{30 * 1445^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} \approx 231{,}58$$

Randwertbetrachtung:

$$\lim_{r\to 0}\left(O(r)\right) = \infty$$

$$\lim_{r\to \infty}\left(O(r)\right) = \infty$$

→ Globales Minimum

h=10,26cm

r=5,13cm

Zum Vergleich: Reale Werte: h= 11,9cm ; d=9,9cm

2.2 - 2. Realmodell

Welcher ist unter allen Zylindern mit dem Volumen von 916 ml derjenige mit der kleinsten Oberfläche?

(Volumen von 916 ml ergibt sich aus den reellen Werten h = 11,9 cm; d = 9,9 cm, Gesamtgröße der Dose unter Berücksichtigung der „Bördelkante“)


Bördelkante
h = 11,9 cm
d = 9,9 cm

Hauptbedingung:

#1: $O(r, h) := 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$

Nebenbedingung:

#2: $V(r, h) := \pi\cdot r^2\cdot h$

#3: $916 = \pi\cdot r^2\cdot h$

nach h umstellen

#4: $h = \frac{916}{\pi\cdot r^2}$

Nebenbedingung in Hauptbedingung einsetzen:
=Zielfunktion (minimieren)

#5: $O(r) := 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{916}{\pi\cdot r^2}$

Ableitung:
Gleich null stellen
etc.

#6: $O'(r) = 4\cdot\pi\cdot r - \frac{1832}{r^2}$

....

r ~ 5,3 cm; h ~ 10,6 cm (2 x r = h)

2.3 - 3.Realmodell

- Berechnung der kleinsten Oberfläche aller Zylinder mit dem Volumen 916 ml unter Berücksichtigung der Falzen

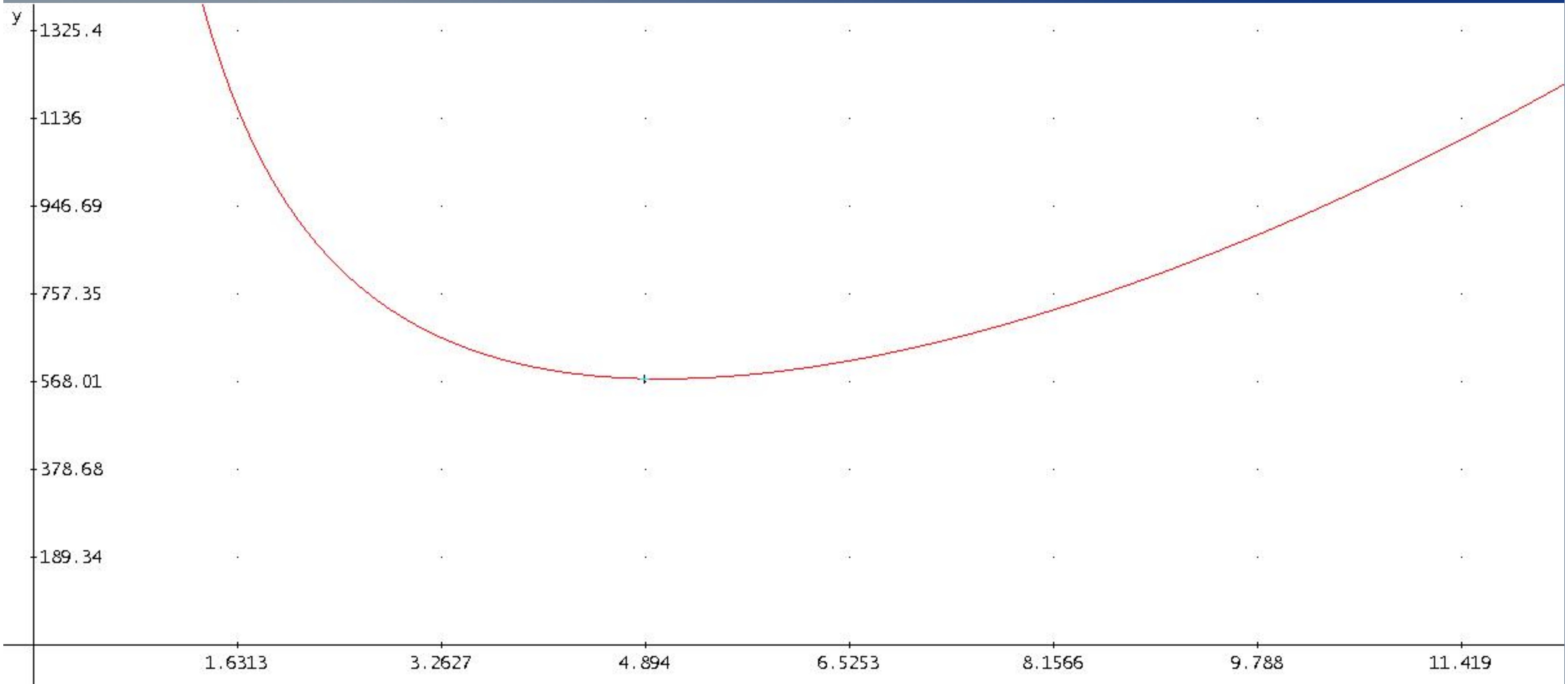
Berücksichtigung der Falzen

- Falzen: Deckelradius + 0,75 ; Höhe + 1
  - Hauptbedingung: $O(r,h)=2\pi\cdot(r+0{,}75)^2 + 2\pi r(h+1)$
  - Nebenbedingung: $\pi r^2 h = 916{,}02$

    $h = 916{,}02 / \pi r^2$
- Zielfunktion:

$$2\cdot\pi\cdot r\cdot((916{,}02/\pi r^2)+1)+ 2\cdot\pi\cdot(r + 0{,}75)^2$$

Graph der Oberflächenfunktion



Ergebnis

- Optimaler Radius: 4,88cm
- Optimale Höhe: 12,25cm
- Realität: r = 4,95cm ; h = 11,9cm
  - Passt sehr gut mit der Realität überein

2.4 - 4. Realmodell

- Berechnung der kleinsten Oberfläche aller Zylinder mit dem Volumen 916 ml unter Berücksichtigung der Falzen *und der Sicken*

Berücksichtigung der Sicken

- Sicken: Höhe + 0,1
  - Hauptbedingung: $O(r,h)=2\pi\cdot(r+0{,}75)^2 + 2\pi r(h+1+0{,}1)$
  - Nebenbedingung: $\pi r^2 h = 916{,}02$

    $h = 916{,}02 / \pi r^2$
- Zielfunktion:

$$2\cdot\pi\cdot r\cdot((916{,}02/\pi r^2)+1+0{,}1)+2\cdot\pi\cdot(r+0{,}75)^2$$

Ergebnis

- Optimaler Radius: 4,86cm
- Optimale Höhe: 12,36cm
- Realität: r = 4,95cm ; h = 11,9cm
  - Es ändert sich kaum etwas zum vorherigen Model

2.5 Realmodell: Das Dickenverhältnis

- Dicke des Bodens/Deckels größer als die des Mantels → aus Stabilitätsgründen
- Dickenverhältnis liegt bei 1,2

  → Rechnung für Boden aus 4. Realmodell wird mit 1,2 multipliziert
- Daraus ergibt sich:

  Hauptbedingung:

  $O(r,h) = 2\pi r*(h+1{,}15)+\pi/2*(2r+1{,}5)^2*1{,}2$

Nebenbedingung: $h = 916/(\pi r^2)$

Zielfunktion:

$O(r) = 2\pi r*(916/\pi r^2+1{,}15)+(\pi/2*(2r+1{,}5)^2)*1{,}2$

- Extrema im Definitionsbereich $0 < r < \infty$

→ Abgeleitete Zielfunktion wird gleich Null gesetzt

→ $r \approx 4{,}57$ [cm]

- Einsetzen von r in die Nebenbedingung

→ $h \approx 13{,}99$ [cm]

Trotz Verfeinerung des Modells entfernen sich die Werte von den realen Werten

3 Normierungsvorgaben

- Dosenhersteller→Einhalten der Normierungen
- Langer historischer Prozess
- DIN-Normen→Normen für Deutschland
- E-Normen → Normen für Europa
- ISO-Normen→Normen auf internationaler Ebene
- Umfassen Begriffsbestimmungen, Festlegungen für Abmessungen und Volumen
- Din-Normen bei der 850 ml Dose:

Dose (in ml)	Durchmesser (in mm)	Höhe (in mm)
850	99	119

Fazit

- Die optimale Dose kann aufgrund der Normen nicht hergestellt werden
- Die Hersteller müssten sich eigentlich an unserem 5. Realmodell orientieren


adidas
ISO